نعتبر العددين الحقيقيين $a = (1+\sqrt{13})^2$ و $b = 14 + 4\sqrt{5} - \sqrt{45} + \sqrt{125}$.

1) أثبت أن $a = 14 + 2\sqrt{13}$ و $b = 14 + 6\sqrt{5}$.

2) قارن بين $6\sqrt{5}$ و $2\sqrt{13}$ ثم استنتج مقارنة للعددين a و b .

3) أ) أثبت أن $b = (3+\sqrt{5})^2$.

ب) استنتج مقارنة بين $3+\sqrt{5}$ و $1+\sqrt{13}$.

1

$$\begin{aligned} a &= (1+\sqrt{13})^2 \\ &= 1^2 + 2\times1\times\sqrt{13} + \sqrt{13}^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{13} + 13 \\ &= 14 + 2\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 14 + 4\sqrt{5} - \sqrt{45} + \sqrt{125} \\ &= 14 + 4\sqrt{5} - \sqrt{9\times5} + \sqrt{25\times5} \\ &= 14 + 4\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} \\ &= 14 + 9\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \\ &= 14 + 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

2

$(6\sqrt{5})^2 = 180$

$(2\sqrt{13})^2 = 52$

$(6\sqrt{5})^2 > (2\sqrt{13})^2$

ولدينا $6\sqrt{5}$ و $2\sqrt{13}$ عددان موجبان

إذن $6\sqrt{5} > 2\sqrt{13}$

$a = 14 + 2\sqrt{13}$ $\quad$ $b = 14 + 6\sqrt{5}$

لدينا $6\sqrt{5} > 2\sqrt{13}$

$$\underbrace{14 + 6\sqrt{5}}_{b} > \underbrace{14 + 2\sqrt{13}}_{a}$$

$b > a$

3 أ

$$\begin{aligned} &(3+\sqrt{5})^2 \\ &= 3^2 + 2\times3\times\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{5} + 5 \\ &= 14 + 6\sqrt{5} \\ &= b \end{aligned}$$

إذن $b = (3+\sqrt{5})^2$

ب لدينا

$a = (1+\sqrt{13})^2$

$b = (3+\sqrt{5})^2$

ولدينا أيضا

$b > a$

$(3+\sqrt{5})^2 > (1+\sqrt{13})^2$

و $(3+\sqrt{5})$ و $(1+\sqrt{13})$ عددان موجبان

إذن

$3+\sqrt{5} > (1+\sqrt{13})$

نعتبر العبارتين $A = 9x^2 - 1$ و $B = (x+1)^2 - 4x^2$ حيث xعدد حقيقي .

1) أ) بين أن $B = -3x^2 + 2x + 1$.

ب) احسب القيمة العددية للعبارة B إذا كان $x = \sqrt{3}$.

ج) بين أن $B = (3x+1)(1-x)$.

2) فكك العبارة A إلى جذاء عاملين .

3) بين أن $A - B = 2(3x+1)(2x-1)$.

4) أوجد العدد الحقيقي x الذي يحقق $A = B$.

1

أ)

$B = (x+1)^2 - 4x^2$
$= x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 - 4x^2$
$= x^2 - 4x^2 + 2x + 1$
$= -3x^2 + 2x + 1$

ب)

$x = \sqrt{3}$

$B = -3\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1$
$= -3 \times 3 + 2\sqrt{3} + 1$
$= -9 + 2\sqrt{3} + 1$
$= -8 + 2\sqrt{3}$.

ج)

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$B = (x+1)^2 - 4x^2$
$= (x+1)^2 - (2x)^2$
$= (x+1-2x)(x+1+2x)$
$B = (1-x)(3x+1) = (3x+1)(1-x)$

2) فكك

$A = 9x^2 - 1$
$= (3x)^2 - 1^2$
$= (3x-1)(3x+1)$

3)

$A - B = (3x-1)(3x+1) - (3x+1)(1-x)$
$= (3x+1)(3x-1-(1-x))$
$= (3x+1)(3x-1-1+x)$
$= (3x+1)(4x-2)$
$= (3x+1)(2 \times 2x - 2 \times 1)$
$= (3x+1)2(2x-1)$
$= 2(3x+1)(2x-1)$

4)

$A = B$
$A - B = 0$
$2(3x+1)(2x-1) = 0$

$3x+1 = 0$ أو $2x-1 = 0$
$3x = -1$ أو $2x = 1$
$x = -\frac{1}{3}$ أو $x = \frac{1}{2}$

$ax = b$
$x = \frac{b}{a}$

تمرين 1 : (3 نقاط)

اختر الجواب الصحيح من بين المقترحات المقدّمة :

1. إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث $a<b$ فإنّ :

أ. $a-1<b-2$ ب. $-2a<-2b$ ج. $2-a>2-b$.

$\sqrt{2}=1,41...$

2. الترتيب التصاعدي للأعداد $a=\frac{1}{2}$ و $b=\sqrt{2}-1$ و $c=2-\sqrt{2}$ هو :

$a=0,5$ $b=0,41...$ $c=2-1,41=0,59$

أ. $a<b<c$ ب. $b<a<c$ ج. $c<a<b$.

3. إذا كان $ABCD$ مربّعا بحيث $AC=2+\sqrt{2}$ فإنّ :

أ. $AB=\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ ب. $AB=\sqrt{2}+1$ ج. $AB=2+\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. إذا كانت G مركز ثقل مثلّث ABC متقايس الأضلاع بحيث $AB=2\sqrt{3}$ فإنّ :

أ. $AG=1$ ب. $AG=2$ ج. $AG=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

(1)

$* \; -a=(-1)\times a$

$-3=(-1)\times 3$

$+2-a>2-b$

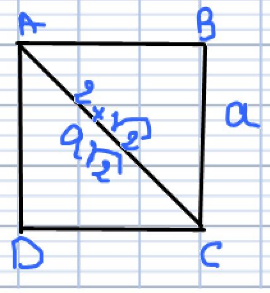
$a<b$

$(-1)a>(-1)b$

$-a>-b$

$2-a>2-b$

$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$



(3)

$AB=\frac{AC}{\sqrt{2}}$

$AB=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

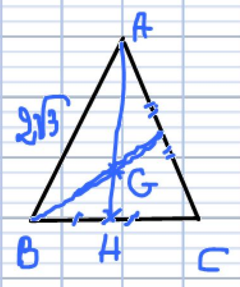
$=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+1$

$=\sqrt{2}+1$

4. إذا كانت G مركز ثقل مثلّث ABC متقايس الأضلاع بحيث $AB=2\sqrt{3}$ فإنّ :

أ. $AG=1$ ب. $AG=2$ ج. $AG=\frac{4}{\sqrt{3}}$.



$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2\sqrt{3}$

$=3$

$AG=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}\times 3=2$

تمرين 2 : (4 نقاط)

نعتبر العبارة : $A=7x^2-19x+10$ حيث $x\in\mathbb{R}$.

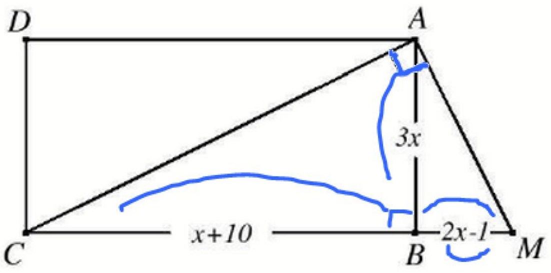
1. أنشر و اختصر العبارة $(x-2)^2$.

2. أ. بيّن أنّ $A=7(x-2)^2+9x-18$.

ب. فكّك إذًا العبارة A إلى جذاء عوامل.

3. في الرّسم المقابل $ABCD$ مستطيل بحيث $AB=3x$ و $BC=x+10$ (x عدد حقيقي أكبر من 1).

أوجد x ليكون البعد BM مساويًا لـ $2x-1$.



$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(1) $(x-2)^2=x^2-2\times 2\times x+2^2$

$=x^2-4x+4$

(2) (أ)

$\times\ 7(x-2)^2+9x-18$

$=7(x^2-4x+4)+9x-18$

$=7x^2-28x+28+9x-18$

$=7x^2-28x+9x+28-18$

$=7x^2-19x+10$

$=A$

اذن $A=7(x-2)^2+9x-18$

(2) (ب)

$A=7(x-2)^2+9x-18$

$=7(x-2)^2+9x-9\times 2$

$=7(x-2)(x-2)+9(x-2)$

$=(x-2)(7(x-2)+9)$

$=(x-2)(7x-14+9)$

$=(x-2)(7x-5)$

(3) ACM مثلث قائم في A و [AB] ارتفاعه الصادر من A

اذن $AB^2=BC\times BM$

$(3x)^2=(x+10)\times(2x-1)$

$9x^2=2x^2-x+20x-10$

$9x^2=2x^2+19x-10$

$9x^2-2x^2-19x+10=0$

$7x^2-19x+10=0$

$A=0$

$(x-2)(7x-5)=0$

$x-2=0$ أو $7x-5=0$

$x=2$ أو $7x=5$

$x=\frac{5}{7}$

وبما أنّ x أكبر من 1

اذن $x=2$

تمرين 3: (5 نقاط)

نعتبر العددين : $a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2$ و $b=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)+\sqrt{2}\left(1-\sqrt{\frac{9}{8}}\right)$.

1. بيّن أنّ $a=2+\sqrt{3}$ و $b=\frac{5}{2}+\sqrt{2}$.
2. أ. بيّن أنّ $a^2=7+4\sqrt{3}$ و $b^2=\frac{33}{4}+5\sqrt{2}$.

ب. قارن $4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}$.

ج. قارن a^2 و b^2 و استنتج مقارنة a و b.

3. أ. بيّن أنّ العدد $c=2-\sqrt{3}$ مقلوب a.

ب. بيّن أنّ $bc=5+2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

أ (3

$a\times c=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$
$=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$

دلالة a و c مقلوبان

$\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$

1

$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^2$
$=\frac{1}{2}(1^2+2\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2)$
$=\frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}+3)$
$=\frac{1}{2}(4+2\sqrt{3})$
$=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}2\sqrt{3}$
$=2+\sqrt{3}$

$b=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)+\sqrt{2}\left(1-\sqrt{\frac{9}{8}}\right)$
$=\sqrt{5}^2-1^2+\sqrt{2}-\cancel{\sqrt{2}}\times\frac{3}{2\cancel{\sqrt{2}}}$
$=5-1+\sqrt{2}-\frac{3}{2}$
$=4-\frac{3}{2}+\sqrt{2}$
$=\frac{8}{2}-\frac{3}{2}+\sqrt{2}$
$=\frac{5}{2}+\sqrt{2}$

أ 2

$*\ a^2=(2+\sqrt{3})^2$
$=2^2+2\times2\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2$
$=4+4\sqrt{3}+3$
$=7+4\sqrt{3}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

$b^2=\left(\frac{5}{2}+\sqrt{2}\right)^2$
$=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\cancel{2}\times\frac{5}{\cancel{2}}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2$
$=\frac{25}{4}+5\sqrt{2}+2$
$=\frac{25}{4}+\frac{8}{4}+5\sqrt{2}$
$=\frac{33}{4}+5\sqrt{2}$

2) ج:

لدينا $b^2=\frac{33}{4}+5\sqrt{2}$ ، $a^2=7+4\sqrt{3}$

$5\sqrt{2}>4\sqrt{3}$

$\frac{33}{4}>7=\frac{28}{4}$

$5\sqrt{2}+\frac{33}{4}>4\sqrt{3}+7$

$b^2>a^2$

* استنتج مقارنة لـ a و b

لدينا $a^2<b^2$ و a و b موجبان إذن $a<b$

ب. قارن $4\sqrt{3}$ و $5\sqrt{2}$.

$(4\sqrt{3})^2=4^2\times\sqrt{3}^2=16\times3=48$
$(5\sqrt{2})^2=5^2\times\sqrt{2}^2=25\times2=50$

$(5\sqrt{2})^2>(4\sqrt{3})^2$ و $5\sqrt{2}$ و $4\sqrt{3}$ عددان موجبان إذن $5\sqrt{2}>4\sqrt{3}$

تمرين 4: (5 نقاط)

في الرّسم بالملحق ABC مثلّث قائم الزّاوية في A بحيث $AB=6$ و $AC=2\sqrt{3}$.

1. بيّن أنّ $BC=4\sqrt{3}$.
2. عيّن المنتصف I لِـ $[AB]$.

المستقيم المارّ من I و العمودي على (AB) يقطع (BC) في النّقطة O.

أ. بيّن أنّ O منتصف $[BC]$.

ب. أحسب OI.

ج. بيّن أنّ المثلّث OAC متقايس الأضلاع.

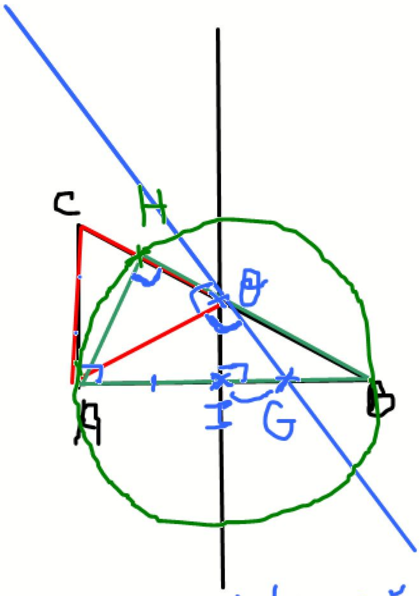
3. الدّائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها $[AB]$ تقطع النّقطة (BC) ثانية في النّقطة H .

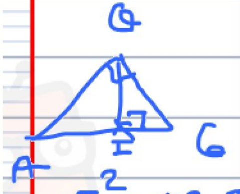
أ. بيّن أنّ المثلّث ABH قائم الزّاوية.

ب. أحسب AH .

4. المستقيم المارّ من O و العمودي على (AO) يقطع (AB) في النّقطة G.

أ. أحسب IG .





$OI^2 = IG\times IA$

$IG = \frac{OI^2}{IA}$

(1) ABC مثلث قائم الزاوية في A حسب نظرية بيتاغور

$BC^2 = AC^2 + AB^2$
$= (2\sqrt3)^2 + 6^2$
$= 12 + 36$
$= 48$

$BC = \sqrt{48} = \sqrt{16\times 3} = \sqrt{16}\times\sqrt3 = 4\sqrt3$

$BC = 4\sqrt3$

(2) (a في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AB]$ المستقيم (OI) يمر من I وموازٍ لحامل الضلع $[AC]$ اذن يقطع الضلع الثالث $[BC]$ في المنتصف وبالتالي O منتصف $[BC]$

(2) (b في المثلث ABC لدينا O منتصف $[BC]$ و I منتصف $[AC]$ اذن $OI = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt3}{2}$

$\boxed{OI=\sqrt3}$

(2) (c) ABC مثلث قائم في A و $[BC]$ وتره النقطة O منتصف $[BC]$ هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC اذن

$OA = OC = \frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt3}{2} = 2\sqrt3$
و لدينا $AC = 2\sqrt3$
$OA = OC = AC$

اذن OAC مثلث متقايس الأضلاع.

(3) (أ H تنتمي الى الدائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها $[AB]$ اذن ABH مثلث قائم في H

(3) (ب لدينا $(AH)\perp(BC)$ اذا H هي مسقط العمودي A على (BC)

في المثلث ABC لدينا H المسقط العمودي لـ A على (BC) اذن

$AH\times BC = AC\times AB$

$AH = \frac{AC\times AB}{BC}$
$= \frac{2\sqrt3\times 6}{4\sqrt3}$
$= 3$

(4) (أ AOG مثلث قائم في O و $[OI]$ هو الارتفاع الصادر من O اذن

$OI^2 = IG\times IA$

$IG = \frac{OI^2}{IA}$
$= \frac{\sqrt3^2}{3}$
$= \frac{3}{3}$
$= 1$

لتكن (ξ) دائرة قطرها [AB] و AB =6 ولتكن N نقطة من الدائرة

حيث BN = 5

و لتكن النقطة $I = S_N(B)$

1) بين ان IAB مثلث متقايس الضلعين
2) أحسب AN و IA
3) المستقيم (IA) يقطع الدائرة في M . بين أن المثلث IMB قائم الزاوية في M
4) لتكن H المسقط العمودي ل N على (AI)
أ) بين أن H هي منتصف [MI]
ب) أحسب كلا من NH و BM
ت) أحسب كلا من IH و AM
5) (MN) و (BH) يتقاطعان في J . بين أن (IJ) يقطع [BM] في منتصفها